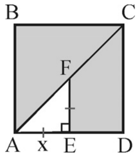
تعریف حد

۱- طول یک میله‌ی فلزی برحسب دمای محیط به صورت $L = ۳۹/۷ + ۰/۰۲۵\theta$ داده شده است. دمای میله در کدام محدوده باشد تا طول آن در بازه‌ی ±۱ میلی‌متر حول ۴۰ بماند؟

۱) بین ۸ و ۱۲ درجه
۲) بین ۸ و ۱۶ درجه
۳) بین ۱۲ و ۱۶ درجه
۴) بین ۱۶ و ۲۰ درجه

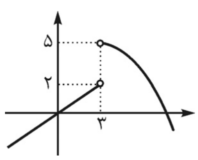


۲- در شکل روبه‌رو، $ABCD$ مربعی به ضلع واحد و AEF، مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. $S(x)$ مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده است. اگر بخواهیم مقدار $S(x)$ را به اندازه‌ی $\frac{۱}{۲۰۰}$ به ۱ نزدیک کنیم، x چه‌قدر باید به صفر نزدیک شود؟

۱) $۰/۱$
۲) $۰/۲$
۳) $۰/۳$
۴) $۰/۴$

۳- در سؤال قبل، اگر بخواهیم $S(x)$ در بازه‌ی $(۰/۹۲, ۱/۰۸)$ قرار گیرد، اندازه‌ی AF در بازه‌ای با کدام طول تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵۰}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲۵}$



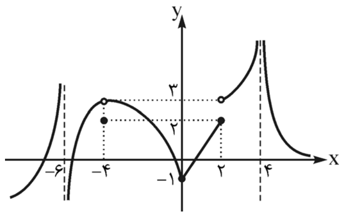
۴- شکل روبه‌رو، نمودار تابع f است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{۳\} \quad , \quad ۰ < ۳ - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - ۲| < \varepsilon$

۲) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{۳\} \quad , \quad ۰ < x - ۳ < \delta \Longrightarrow |f(x) - ۵| < \varepsilon$

۳) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{۳\} \quad , \quad ۰ < |x - ۳| < \delta \Longrightarrow |f(x) - ۲| < \varepsilon$

۴) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{۳\} \quad , \quad ۰ < |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$



۵- با توجه به نمودار تابع f، کدام گزینه، نادرست است؟

۱) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in D_f \quad , \quad \frac{۱}{|x|} > \frac{۱}{\delta} \Longrightarrow |f(x) + ۱| < \varepsilon$

۲) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in D_f \quad , \quad -\delta < x - ۲ < ۰ \Longrightarrow ۲ - \varepsilon < f(x) < ۲ + \varepsilon$

۳) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in D_f \quad , \quad ۲ < x < ۲ + \delta \Longrightarrow (f(x) - ۳)^۲ < \varepsilon^۲$

۴) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \in D_f \quad , \quad ۰ < |x + ۴| < \delta \Longrightarrow \sqrt{f^۲(x) - ۴f(x) + ۴} < \varepsilon$

۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x & x > ۲ \\ ۲\sqrt{۲ - x} - ۴ & x \le ۲ \end{cases}$ **باشد، به ازای هر مقدار مثبت ε، حداکثر مقدار δ در تعریف ریاضی $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = -۴$ کدام است؟**

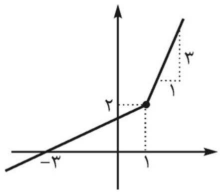
۱) $\sqrt{\varepsilon}$
۲) $\frac{\varepsilon^۲}{۴}$
۳) $\max\{\sqrt{\varepsilon}, \frac{\varepsilon^۲}{۴}\}$
۴) $\min\{\sqrt{\varepsilon}, \frac{\varepsilon^۲}{۴}\}$

۷- اگر $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۳ - ۳x + ۲}{۲(x - ۱)^۲} & x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{-۲x^۲ + ۱۸}{x + ۳} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ **باشد، آن‌گاه در تعریف $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = L$ حداکثر δ کدام است؟**

۱) ۲ε
۲) ε
۳) $\frac{\varepsilon}{۲}$
۴) $\frac{\varepsilon^۲}{۴}$

۸- برای اثبات حد تابع $f(x) = bx + c$ در $x = a \in \mathbb{R}$، به نامساوی $\delta \le \frac{\varepsilon}{۴}$ رسیده‌ایم. اثبات حد تابع fof در $x = a$ به کدام نامساوی منجر می‌شود؟

۱) $\delta \le \frac{\varepsilon}{۸}$
۲) $\delta \le \frac{\varepsilon}{۱۶}$
۳) $\delta \le \frac{\varepsilon}{۴}$
۴) $\delta \le \frac{\varepsilon}{۶}$



۹- در تابع f به شکل روبه‌رو، می‌خواهیم مقادیر تابع در بازه‌ی $(۱/۹,۲/۱)$ قرار گیرد. مقادیر قابل‌قبول برای x در بازه‌ای با کدام طول قرار دارند؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۱۰- در تابع سؤال قبل، اگر بخواهیم مقادیر تابع در بازه‌ی $(۱/۹,۲/۱)$ باشد، x باید در همسایگی c به شعاع r قرار گیرد. cr برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۷}{۳۰}$ ۴) $\frac{۷۷}{۷۲۰}$

۱۱- در دو سؤال قبل، اگر بخواهیم مقادیر تابع در بازه‌ی $(۱/۹,۲/۱)$ باشد، شعاع بزرگ‌ترین همسایگی قابل‌قبول برای $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

∞ ۱۲- اگر $f(x)=۳x+۱$ باشد، به ازای $\varepsilon=۰/۰۲$ در کدام حد زیر، δ_{max} بیشتری به دست می‌آید؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۱۳۸۹} f^{-۱}(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱۳۹۰} f(\frac{x}{۲})$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۱۳۸۹} |f(x)|$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۱۳۹۰} fofof(x)$

۱۳- اگر مقادیر تابع $\frac{x^۲+x-۶}{۲x-۴}$ در بازه‌ی $(۱/۷۷,۲/۲۳)$ قرار گیرند، مجموع طول بازه‌های شامل مقادیر قابل‌قبول x، حداکثر چه‌قدر است؟

۱) ۰/۲۳ ۲) ۰/۴۶ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۱/۱۵

۱۴- در تعریف ریاضی حد راست تابع $y=\frac{x+۴}{[-x]-۳}$ در نقطه‌ی $x_۰=۲$ کافی است $\delta\le\min\{۱,\frac{\varepsilon}{a}\}$ اختیار شود؛ a کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۵- در تعریف حد چپ تابع $f(x)=۳x+[x]$ در نقطه‌ی $x=۳$ کافی است .... اختیار شود.

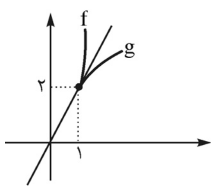
۱) $\delta\le\frac{\varepsilon}{۳}$ ۲) $\delta\le\min\{۱,\frac{\varepsilon}{۳}\}$ ۳) $\delta\le ۳\varepsilon$ ۴) $\delta\le\min\{۱,۳\varepsilon\}$

۱۶- در همسایگی محذوف $x=۲$ می‌خواهیم $|g(x)-۳|<\varepsilon$ باشد. برای $x>۲$ و $x<۲$ به ترتیب روابط $\varepsilon\ge ۳\delta$ و $\varepsilon\ge ۵\delta$ را به دست آورده‌ایم. حداکثر مقدار δ برای $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$ چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۰۲ ۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۰۵

∞ ۱۷- اگر داشته باشیم: $\begin{cases}\forall\varepsilon>۰\,,\ \delta=\frac{\varepsilon}{۲}\ ,\ \forall x\in D_g\ ,\ |x-۳|<\delta\Longrightarrow|g(x)-۱|<\varepsilon\\ \forall\varepsilon>۰\,,\ \delta=\frac{\varepsilon}{۵}\ ,\ \forall x\in D_f\ ,\ |x-۱|<\delta\Longrightarrow|f(x)-۵|<\varepsilon\end{cases}$ و $g(x)$ تابع ثابت نباشد، برای تعریف حد تابع fog در $x=۳$ به ازای $\varepsilon=۰/۱$ حداکثر δ چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۴



۱۸- شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. در همسایگی $x=\sqrt{۲}$ به ازای $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰}$، تعریف حد برای f و g، به ترتیب چه مقادیری از δ_{max} را می‌تواند بدهد؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ و $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$

∞ ۱۹- اگر داشته باشیم $\begin{cases}\forall\varepsilon>۰\,,\ \delta=\frac{\varepsilon}{۴}\,,\ \forall x\in D_f\ ,\ ۰<|x-۲|<\delta\ \Longrightarrow|f(x)-۳|<\varepsilon\\ \forall\varepsilon>۰\,,\ \delta=\varepsilon^۲\,,\ \forall x\in D_g\ ,\ ۰<|x-۲|<\delta\ \Longrightarrow|g(x)-۵|<\varepsilon\end{cases}$، در تعریف حد تابع $(f+g)(x)$ در $x=۲$، به ازای $\varepsilon=\frac{۱}{۵}$ حداکثر δ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰۰}$

∞ ۲۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & x\in\mathbb{Q},x>۱\\ ۲x-۳ & x\in\mathbb{Q},x<۱\\ \sqrt[۳]{x-۱}-۱ & x\in\mathbb{Q}',x>۱\\ \frac{x^۲-۱}{۲-۲x} & x\in\mathbb{Q}',x<۱\end{cases}$، می‌خواهیم مقادیر تابع در همسایگی عدد -۱ به شعاع ۰/۰۱ قرار گیرد. شعاع بزرگ‌ترین همسایگی قابل‌قبول برای x کدام است؟

۱) $۱۰^{-۱}$ ۲) $۱۰^{-۲}$ ۳) $۱۰^{-۳}$ ۴) $۱۰^{-۶}$

۲۱- در رابطه‌ی «$\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists\delta>0 \ , \ \forall x\in D_f \ , \ 0<|x-1|<\delta \Longrightarrow |f(x)|<\varepsilon$» به ازای $\varepsilon=10^{-6}$، برای کدام تابع حداکثر مقدار δ از بقیه کم‌تر است؟

۱) $(x-1)^2$ ۲) $\sqrt{|x-1|}$ ۳) $(x-1)^3$ ۴) $\sqrt[3]{x-1}$

۲۲- می‌خواهیم در همسایگی ۳ به شعاع $\frac{1}{2}$، ثابت کنیم $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6}{x-2}=3$. بزرگ‌ترین همسایگی قابل‌قبول برای x، چه شعاعی دارد؟

۱) $\min\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{7}\}$ ۲) $\min\{\frac{1}{2},5\varepsilon\}$ ۳) $\min\{\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{7}\}$ ۴) $\min\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{5}\}$

∞ ۲۳- اگر $\delta\in(a,b)$ باشد، آن‌گاه گزاره‌ی شرطی «$0<|x-2/1|<\delta \Longrightarrow |[2x]-4|<\frac{1}{5}$» ارزش درستی دارد. بیشترین مقدار $b-a$ چیست؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

مقدمات حد

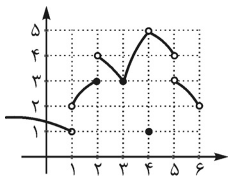
۲۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر، درست است؟ *(کتاب درسی)*

الف) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-l)=0$.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l>0$ باشد، آن‌گاه f در یک همسایگی محذوف a مثبت است.

ج) اگر در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم، $f(x)<g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l_2$ ، آن‌گاه $l_1<l_2$.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

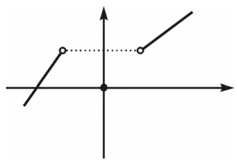


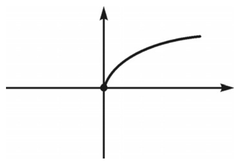
۲۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)+\lim\limits_{x\to 4^+}f(f(x))+\lim\limits_{x\to 1^+}f(5-4x)$ برابر است با:

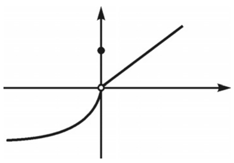
۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۹ ۴) ۶

۲۶- کدام تابع در $x=0$ دارای حد است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۲۷- چندتا از حدهای زیر، موجودند؟

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x^2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|(x^2-1)}$ ج) $\lim\limits_{x\to 1}\sin^{-1}\sqrt{x}$

د) $\lim\limits_{x\to -1}\log(x^2-2x)$ هـ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{[x-2]}$ و) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸- کدام حد وجود دارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\sin^{-1}\frac{x^2+1}{x^2}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3\cot[x]$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log[x]$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$

۲۹- کدام حد وجود دارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 5}x!$ ۲) $\lim\limits_{x\to 4}\underbrace{x+x+\cdots+x}_{x \text{ تا}}$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]\cot x$

۳۰- کدام گزینه در مورد تابع $y=\sin^{-1}(x^2+1)+\cos^{-1}(x^2+1)$ درست است؟

۱) در هر نقطه حدی برابر $\frac{\pi}{2}$ دارد.
۲) فقط در $x=0$ حدی برابر $\frac{\pi}{2}$ دارد.
۳) فقط در $x=0$ حدی برابر $\frac{1}{\cos 1}+\frac{1}{\sin 1}$ دارد.
۴) در هر نقطه فاقد حد است.

۳۱- اگر $\lim\limits_{x\to a}[x^2]+[3-x^2]$ موجود باشد، به جای a چندتا از اعداد -2، $\sqrt{2}$، 0 و π را می‌توان قرار داد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۲- اگر $f(x)=\operatorname{sgn}(x^3-x)$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{6}}[f(x)]+[-f(x)]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -1
۴) ۳

۳۳- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi\sqrt{3}}{12}}[\log\frac{x}{10}]+[7-\log x]$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۳۴- اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) صفر و صفر
۲) صفر و -2
۳) -2 و صفر
۴) -2 و -2

۳۵- اگر $s(x)$ تابع علامت باشد، تابع $y=s(|x|-x^2)$ در چند نقطه حد <u>ندارد</u>؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار نقطه

۳۶- حاصل کدام گزینه از بقیه بیشتر است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3}{\sqrt{x+1}}$
۲) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+9}-\frac{x^2+x}{x})$
۳) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x^2-1}{x-1}+\sqrt{x^2+3})$
۴) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

۳۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3-2x^2+x-10}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x^2+5}}$ کدام است؟

۱) -51
۲) -17
۳) -34
۴) $-25/5$

۳۸- معادله‌ی $ax^2+2x-1=0$ دارای دو ریشه‌ی x_1 و x_2 است و داریم $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+a}}{a}$. اگر $a\to 0$، ریشه‌ی بزرگ‌تر به سمت چه عددی میل می‌کند؟

۱) صفر
۲) ∞
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۳۹- اگر $g(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد و حد چپ تابع $y=\frac{2x-3}{\sqrt{g(x)}}$ در نقطه‌ی $x_0=1/5$ برابر -1 باشد، نمودار تابع g، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{9}{4}$
۲) ۹
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

۴۰- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(\frac{2x}{x^2-1}-|\frac{x}{x+1}|)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۲
۴) $-\infty$

پاسخ‌های تشریحی فصل ۳

۱- گزینه‌ی «۲»

فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه‌ی آن شامل یک همسایگی چپ یا راست a (یا هر دو) باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی a، حدی برابر L دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که برای هر x از دامنه‌ی f اگر $0<|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$؛ به بیان دیگر:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0\ ,\ \forall x\in D_f\ ,\quad 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

- **تعریف کوشی**[1]: برای هر همسایگی V از عدد L، همسایگی u از عدد a وجود دارد که برای هر $x\in u$، $f(x)\in V$ خواهد بود.
- کتاب درسی تأکید می‌کند که می‌توان شعاع همسایگی محذوف a را از δ هم کم‌تر گرفت. زیرا اگر $\delta_1\le\delta$ باشد، از $0<|x-a|<\delta_1$ نتیجه می‌شود $0<|x-a|<\delta$. یعنی δ می‌تواند از مقدار به دست آمده کم‌تر باشد.

اگر حد راست یا حد چپ را بخواهیم، در نامساوی‌های $0<|x-a|<\delta$، قدرمطلق را برمی‌داریم. برای حد راست، $x>a$ است و داریم: $0<x-a<\delta$ که آن را به صورت $a<x<a+\delta$ هم می‌توان نوشت.

برای حد چپ نیز، $x<a$ است و $|x-a|$ برابر $a-x$ می‌شود. پس $a-\delta<x<a$ یا $-\delta<x-a<0$ یا $0<a-x<\delta$ در تعریف حد قرار می‌گیرند. دقت کنید که همسایگی برای $f(x)$ محذوف نیست. مگر این‌که f در همسایگی a، یک‌به‌یک باشد!

one یعنی باید $|L-40|<0/1$ باشد. پس داریم:

$$|39/7+0/025\theta-40|<0/1 \Longrightarrow |0/025\theta-0/3|<0/1$$

$$\Longrightarrow -0/1<0/025\theta-0/3<0/1 \Longrightarrow 0/2<0/025\theta<0/4 \Longrightarrow 8<\theta<16$$

two خیلی ساده‌تر، می‌توان نوشت: $39/9<L<40/1$

$$\Longrightarrow 39/9<39/7+0/025\theta<40/1 \Longrightarrow 0/2<0/025\theta<0/4 \Longrightarrow 8<\theta<16$$

۲- گزینه‌ی «۱»

اول S(x) را پیدا کنیم:

$$S(x)=S_{ABCD}-S_{AEF}=1^2-\frac{x^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}$$

حالا:

$$|S(x)-1|<\frac{1}{200} \Longrightarrow \left|1-\frac{x^2}{2}-1\right|<\frac{1}{200} \Longrightarrow \frac{x^2}{2}<\frac{1}{200} \Longrightarrow |x|<0/1$$

۳- گزینه‌ی «۲»

می‌توانیم بازه را به صورت همسایگی بنویسیم:

$$(0/92,1/08)=N(1,0/08)$$

مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده، $1-\frac{x^2}{2}$ است:

$$\left|1-\frac{x^2}{2}-1\right|<0/08 \Longrightarrow \frac{x^2}{2}<\frac{8}{100} \Longrightarrow x^2<\frac{16}{100} \Longrightarrow |x|<0/4$$

اما با توجه به شکل، x مثبت است پس $0<x<0/4$. حالا:

$$AF=\sqrt{2}x \Longrightarrow 0<AF<0/4\sqrt{2} \Longrightarrow 0<AF<\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

۴- گزینه‌ی «۳»

۱ می‌گوید حد چپ در $x=3$ می‌شود ۲.

۲ هم می‌گوید حد راست در $x=3$ می‌شود ۵.

۴ یعنی حد در $x=0$ می‌شود صفر.

اما ۳ یعنی $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$ که درست نیست.

۱- آگوستین لوئیس کوشی، اسم آدم است.

۵- گزینه‌ی «۴»

۱ یعنی $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-۱$ (رابطه‌ی $\frac{۱}{\delta}>\frac{۱}{|x|}$ یعنی $۰<|x|<\delta$).

۲ یعنی $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲$ (رابطه‌ی $۲-\varepsilon<f(x)<۲+\varepsilon$ یعنی $|f(x)-۲|<\varepsilon$).

۳ یعنی $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳$ (رابطه‌ی $(f(x)-۳)^۲<\varepsilon^۲$ یعنی $|f(x)-۳|<\varepsilon$).

۴ یعنی $\lim\limits_{x\to -۴} f(x)=۲$ که درست نیست ($\sqrt{f^۲(x)-۴f(x)+۴}=|f(x)-۲|$)، بلکه $\lim\limits_{x\to -۴} f(x)=۳$.

۶- گزینه‌ی «۴»

از ضابطه‌ی بالا در ۲^+: $|x^۲-۴x+۴|<\varepsilon \Longrightarrow |x-۲|^۲<\varepsilon \Longrightarrow |x-۲|<\sqrt{\varepsilon}$

از ضابطه‌ی پایین در ۲^-: $|۲\sqrt{۲-x}-۴+۴|<\varepsilon \Longrightarrow ۲\sqrt{۲-x}<\varepsilon \Longrightarrow ۲-x<\frac{\varepsilon^۲}{۴}$

همیشه بین چندتا δ، کم‌ترین آن‌ها را برمی‌داریم. بنابراین: $\delta_{max}=\min\{\sqrt{\varepsilon},\frac{\varepsilon^۲}{۴}\}$

۷- گزینه‌ی «۳»

اول ضابطه‌ها را ساده کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^۳-۳x+۲}{۲(x-۱)^۲}=\frac{(x-۱)^۲(x+۲)}{۲(x-۱)^۲}=\frac{x+۲}{۲}\\ \frac{-۲x^۲+۱۸}{x+۳}=\frac{-۲(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=-۲(x-۳)\end{cases}$$

نکته در تابع‌های خطی $y=ax+b$ همواره داریم $\delta\le\frac{\varepsilon}{|a|}$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۲$، از ضابطه‌ی بالا $\delta\le ۲\varepsilon$ و از ضابطه‌ی پایین $\delta\le\frac{۱}{۲}\varepsilon$ به دست می‌آید. $\delta\le\min\{۲\varepsilon,\frac{۱}{۲}\varepsilon\} \Longrightarrow \delta_{max}=\frac{\varepsilon}{۲}$

۸- گزینه‌ی «۲»

در مورد تابع خطی می‌دانیم همواره $\delta\le\frac{\varepsilon}{|a|}$ که a شیب خط است ($a\ne ۰$)؛ بنابراین $|b|=۴$. حالا $fof(x)=b^۲x+bc+c$ و خواهیم داشت:

$$\delta\le\frac{\varepsilon}{b^۲}\xrightarrow{|b|=۴}\delta\le\frac{\varepsilon}{۱۶}$$

۹- گزینه‌ی «۳»

اگر $x>۱$ باشد، ضابطه‌ی تابع به صورت $y=\frac{x+۳}{۲}$ است. حال می‌خواهیم $\frac{x+۳}{۲}>۱/۹$ باشد، پس $x>۰/۸$ است.

برای $x<۱$، ضابطه‌ی تابع به صورت $y=۳x-۱$ است و می‌خواهیم $۳x-۱<۲/۱$ باشد، پس $x<\frac{۳۱}{۳۰}$ است. بنابراین $\frac{۴}{۵}<x<\frac{۳۱}{۳۰}$ و طول بازه‌ی جواب x برابر است با: $\frac{۳۱}{۳۰}-\frac{۴}{۵}=\frac{۷}{۳۰}$

دقت کنید که چون شیب‌ها فرق دارند، طول بازه در چپ و راست $x=۱$ با هم مساوی نشد.

۱۰- گزینه‌ی «۴»

دیدیم که x باید در بازه‌ی $(\frac{۴}{۵},\frac{۳۱}{۳۰})$ باشد. مرکز این بازه $c=\frac{\frac{۲۴+۳۱}{۳۰}}{۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$ و شعاع آن $r=\frac{\frac{۳۱-۲۴}{۳۰}}{۲}=\frac{۷}{۶۰}$ است. پس $cr=\frac{۷۷}{۷۲۰}$.

۱۱- گزینه‌ی «۲»

در تابع‌های خطی $\delta\le\frac{\varepsilon}{|a|}$ بود. در این‌جا نیم‌خط سمت راست شیب ۳ دارد. پس: $\delta\le\frac{\varepsilon}{۳}\Longrightarrow\delta\le\frac{۰/۱}{۳}=\frac{۱}{۳۰}$

یعنی شعاع بزرگ‌ترین همسایگی قابل قبول برای $x=۱$، $\frac{۱}{۳۰}$ است.

۱۲- گزینه‌ی «۱»

دیدیم که در تابع خطی $f(x)=ax+b$، همواره $\delta_{max}=\frac{\varepsilon}{|a|}$. در این‌جا هر ۴ گزینه توابع خطی هستند (قدرمطلق f نیز به دو نیم‌خط قابل تفکیک است)؛ بنابراین باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که شیب (قدرمطلق شیب) کم‌تری دارد.

۱ $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3} \Rightarrow \delta\le 3\varepsilon$

۲ $f(\frac{x}{2})=\frac{3}{2}x+1 \Rightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow \delta\le\frac{2\varepsilon}{3}$

۳ $|f(x)|=|3x+1| \Rightarrow a=3 \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{3}$

۴ $fofof(x)=3(3(3x+1)+1)+1=27x+13 \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{27}$

پس δ_{max} در ۱ از همه بیشتر است.

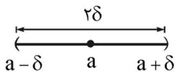
۱۳- گزینه‌ی «۳»

دقت کنید که ضابطه به صورت $\frac{(x+3)(x-2)}{2(x-2)}=\frac{x+3}{2}$ ساده می‌شود. حالا چون $1.77<\frac{x+3}{2}<2.23$ است، می‌توان گفت: $(x\neq 1)$

$$3.54<x+3<4.46 \Rightarrow 0.54<x<1.46 \Rightarrow x\in(0.54,1)\cup(1,1.46)$$

و مجموع طول بازه‌های جواب x برابر است با: $1.46-0.54=0.92$

در حالت کلی، مجموع طول بازه‌های موردنظر، $2\delta_{max}$ است:



راستی می‌توانستیم $f(x)\in(1.77,2.23)$ را به صورت $|f(x)-2|<0.23$ و $(0.54,1)\cup(1,1.46)$ را به صورت $0<|x-1|<0.46$ هم بنویسیم.

۱۴- گزینه‌ی «۲»

در سمت راست $x=2$، داریم: $[-x]=[-(2^+)]=-3$، بنابراین $f(x)=\frac{x+4}{-6}$؛ پس $\delta\le\frac{\varepsilon}{|a|}=\frac{\varepsilon}{|\frac{-1}{6}|}$ یعنی $a=\frac{1}{6}$.

حالا چرا $\min\{1,\frac{\varepsilon}{a}\}$ به دست آمد؟! خُب چون شعاع همسایگی را $r=1$ گرفته‌ایم تا براکت را برداریم.

۱۵- گزینه‌ی «۲»

اول تکلیف براکت را معلوم کنیم. چون $x\to 3^-$، با شعاع $r=1$ داریم: $2<x<3 \Rightarrow [x]=2$

حالا تابع به صورت $f(x)=3x+2$ در می‌آید. می‌دانیم در تابع خطی $\delta\le\frac{\varepsilon}{|a|}$ است (a شیب خط است). پس در این‌جا $\delta\le\frac{\varepsilon}{3}$.

به همراه شعاع داریم: $\delta\le\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$

۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$\varepsilon\ge 3\delta \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta_1=\frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \varepsilon\ge 5\delta \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \delta_1=\frac{\varepsilon}{5}$$

بین دوتا δ کم‌ترین را برمی‌داریم: $\Rightarrow \delta\le\min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{5} \xrightarrow{\varepsilon=\frac{1}{100}} \delta\le\frac{1}{500}=0.002$

پس حداکثر مقدار δ برابر است با ۰/۰۰۲.

۱۷- گزینه‌ی «۱»

$$|fog(x)-fog(3)|<\varepsilon \Rightarrow |f(g(x))-f(g(3))|<\varepsilon \xrightarrow{\text{تعریف حد } f} |g(x)-g(3)|<\frac{\varepsilon}{5} \xrightarrow{\text{تعریف حد } g} |x-3|<\frac{\frac{\varepsilon}{5}}{2}=\frac{\varepsilon}{10}$$

بنابراین: $\delta_{max}=\frac{\varepsilon}{10}=\frac{0.1}{10}=0.01$

۱۸- گزینه‌ی «۲»

برای تابع خطی $y=2x$، دقیقاً $\delta_{max}=\frac{\varepsilon}{2}$ است، یعنی $\delta_{max}=\frac{1}{20}$. f، از تابع خطی $y=2x$ سریع‌تر رشد می‌کند. پس δ در آن باید کم‌تر از $\frac{1}{20}$ باشد. در مورد تابع g، برعکس است. یعنی δ در آن از $\frac{1}{20}$ بیشتر است. با این توضیحات فقط ۲ می‌تواند باشد.

خیلی‌ها این‌طوری می‌گویند که $\frac{\varepsilon}{\delta}$ تقریباً برابر قدرمطلق مشتق تابع در آن همسایگی است.

۱۹- گزینه‌ی «۴»

$$|(f+g)(x)-۸|<\varepsilon \xrightarrow{\text{نامساوی مثلثی}} |f(x)-۳|+|g(x)-۵|<\varepsilon$$

حال هر یک از قدرمطلق‌ها را کم‌تر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ بگیریم:

$$|f(x)-۳|<\frac{\varepsilon}{۲} \xrightarrow{\text{تعریف حد } f} |x-۲|<\frac{\frac{\varepsilon}{۲}}{۴}=\frac{\varepsilon}{۸}$$

$$|f(x)-۵|<\frac{\varepsilon}{۲} \xrightarrow{\text{تعریف حد } g} |x-۲|<\left(\frac{\varepsilon}{۲}\right)^۲=\frac{\varepsilon^۲}{۴}$$

بنابراین $\delta_۱=\frac{\varepsilon}{۸}\,,\ \delta_۲=\frac{\varepsilon^۲}{۴}$ و داریم:

$$\delta=\min\{\delta_۱,\delta_۲\}=\min\{\frac{۱}{۴۰},\frac{۱}{۱۰۰}\}$$

۲۰- گزینه‌ی «۴»

x در هر ۴ ضابطه می‌تواند به ۱ میل کند. حداکثر δ را در هر ضابطه محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$|x^۲-۲x-(-۱)|<۰/۰۱ \Longrightarrow |x-۱|^۲<۰/۰۱ \Longrightarrow |x-۱|<۰/۱ \Longrightarrow \delta_۱=۰/۱$$

$$|۲x-۳-(-۱)|<۰/۰۱ \Longrightarrow |x-۱|<\frac{۰/۰۱}{۲}=۰/۰۰۵ \Longrightarrow \delta_۲=۰/۰۰۵$$

$$|\sqrt[۳]{x-۱}-۱-(-۱)|<۰/۰۱ \Longrightarrow |\sqrt[۳]{x-۱}|<۰/۰۱ \Longrightarrow |x-۱|<(۰/۰۱)^۳=۱۰^{-۶} \Longrightarrow \delta_۳=۱۰^{-۶}$$

$$|\frac{x^۲-۱}{۲-۲x}-(-۱)|<۰/۰۱ \Longrightarrow |\frac{(x-۱)(x+۱)}{-۲(x-۱)}+۱|<۰/۰۱ \Longrightarrow |x-۱|<۰/۰۲ \Longrightarrow \delta_۴=۰/۰۲$$

حال δ_{max} برابر کم‌ترینِ این‌هاست، یعنی:

$$\delta_{max}=\min\{\delta_۱,\delta_۲,\delta_۳,\delta_۴\}=۱۰^{-۶}$$

۲۱- گزینه‌ی «۴»

در حالت کلی، گزینه‌ها به صورت $(x-۱)^n$ هستند و داریم:

$$|x-۱|^n<\varepsilon \Longrightarrow |x-۱|<\sqrt[n]{\varepsilon} \text{ یا } \varepsilon^{\frac{۱}{n}} \Longrightarrow \delta_{max}=\varepsilon^{\frac{۱}{n}}$$

بنابراین باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که $\frac{۱}{n}$ بیشتر از بقیه باشد. یعنی n کم‌تر از سایرین باشد. در گزینه‌ها n به ترتیب ۲، $\frac{۱}{۲}$، ۳ و $\frac{۱}{۳}$ است؛ پس ۴ را انتخاب می‌کنیم.

۲۲- گزینه‌ی «۴»

اگر رابطه‌ی $|f(x)-L|<\varepsilon$ را ساده کنیم:

$$|\frac{x^۲-۶}{x-۲}-۳|<\varepsilon \Longrightarrow |\frac{x^۲-۳x}{x-۲}|<\varepsilon \Longrightarrow |x-۳|<\varepsilon\frac{|x-۲|}{|x|}$$

همواره باید شعاع را مینیمم کنیم، بنابراین باید $\frac{|x-۲|}{|x|}$ مینیمم باشد. چون x در همسایگی ۳ به شعاع $\frac{۱}{۲}$ قرار دارد پس $\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$ است. تابع $\frac{x-۲}{x}$ صعودی است و کم‌ترین مقدار آن در این بازه، به ازای $x=\frac{۵}{۲}$ به دست می‌آید که برابر $\frac{\frac{۵}{۲}-۲}{\frac{۵}{۲}}$ یعنی $\frac{۱}{۵}$ است. پس داریم:

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \Longrightarrow |x-۳|<\varepsilon\times\frac{۱}{۵}$$

بنابراین:

$$\delta\le\min\{\frac{۱}{۲},\frac{\varepsilon}{۵}\}$$

۲۳- گزینه‌ی «۱»

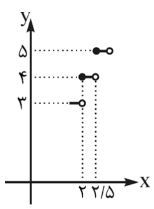
این گزاره تعریف حد تابع $[۲x]$ در $x=۲/۱$ است و داریم:

$$\lim_{x\to ۲/۱}[۲x]=۴$$

حالا δ حتماً باید کم‌تر از ۰/۱ باشد، وگرنه به پله‌ی قبلی می‌رویم!

هم‌چنین δ همواره مثبت است، پس $\delta>۰$ و داریم:

$$\delta\in(۰,۰/۱) \Longrightarrow b-a=۰/۱$$



۲۴- گزینه‌ی «۳»

ج درست نیست. درستش این است که $l_۲\le l_۱$. مثلاً در یک همسایگی محذوف $x=۰$، داریم: $x^۲>۰$، اما:

$$\lim_{x\to۰}x^۲=\lim_{x\to۰}۰=۰$$

الف و ب درست هستند. برای اثبات الف کافی است $|f(x)-l|<\varepsilon$ را به صورت $|(f(x)-l)-۰|<\varepsilon$ بنویسیم و برای ب، $\varepsilon=\frac{l}{۲}$ می‌گیریم و نتیجه می‌شود: $\frac{l}{۲}<f(x)<۳\frac{l}{۲}$. یعنی f در یک همسایگی a با حدش هم‌علامت است.

۲۵- گزینه‌ی «۱»

حد چپ و راست

● فرض کنیم تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد، می‌گوییم f در a حد راستی برابر L دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ هرگاه: $\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0\ ,\ \forall x\in D_f\ ,\ 0<x-a<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

دقت کنید که قدرمطلق از روی عبارت $x-a$ برداشته شده (چون از راست به a میل می‌کند $x-a>0$ است) همچنین توجه کنید که مثل سؤال سراسری ۸۶ و با توجه به تأکید کتاب درسی در صفحه‌ی ۴۵، $0<x-a<\delta$ را به صورت $a<x<a+\delta$ می‌توان نوشت.

در واقع حد راست، مقدار نهایی شاخه‌ی سمت راست $x=a$ در نمودار تابع است.

● فرض کنیم تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد، می‌گوییم f در a حد چپی برابر L دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ هرگاه: $\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0\ ,\ \forall x\in D_f\ ,\ 0<a-x<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

باز هم می‌توان $0<a-x<\delta$ را به صورت $-\delta<x-a<0$ یا $a-\delta<x<a$ بیان نمود. حد چپ نیز مقدار نهایی شاخه‌ی سمت چپ در $x=a$ است.

برای $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$، باید شاخه‌ی سمت چپ ۲ را ببینیم. مقدار نهایی این شاخه در $x=2$ برابر ۳ است.

اما برای $\lim\limits_{x\to 4^+} f(f(x))$، ابتدا $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ را بررسی می‌کنیم:

عرض نهایی شاخه‌ی سمت راست ۴، در این تابع برابر ۵ است. دقت کنید که با مقادیر کم‌تر از ۵ به ۵ می‌رسد، پس: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=5^-$

توجه ما برای حد تابع در $x=a$، علائم + و − را نمی‌گذاریم. اما این‌جا چون fof داریم، این حد را به صورت 5^- نوشتیم.

حالا $\lim\limits_{x\to 4^+} f(f(x))$ برابر $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$ است. شاخه‌ی سمت چپ ۵، نهایتاً به عرض ۴ می‌رسد. پس: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(f(x))=4$

در پایان، $\lim\limits_{x\to 1^+} f(5-4x)$ را داریم. وقتی $x\to 1^+$، $5-4x$ نیز به سمت ۱ می‌رود. (چون خط $y=5-4x$ تابعی پیوسته است، مقدار نهایی شاخه‌ها با مقدار تابع برابر است). اما x کمی بیشتر از ۱ است، پس $5-4x$ کمی کم‌تر از ۱ می‌شود. یعنی: $x\to 1^+ \Longrightarrow 5-4x\to 1^-$

(این موضوع، با دقت به شیب منفی خط و نزولی‌بودن تابع هم بدیهی است. اگر دوست دارید $x=1/1$ قرار دهید.) پس داریم:

(مقدار نهایی شاخه‌ی سمت چپ $x=1$ را می‌خواستیم.) $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(5-4x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

و جواب سؤال $(1+4+3=)8$ است.

۲۶- گزینه‌ی «۴»

ابتدا به دو نکته‌ی زیر خوب دقت کنید:

نکته ۱ اگر تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی a تعریف شده باشد، در نقطه‌ی a حدی برابر L خواهد داشت اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

نکته ۲ اما اگر تابع f <u>فقط</u> در همسایگی راست (یا همسایگی چپ) a تعریف شده باشد، آن‌گاه حد راست (یا حد چپ) تابع f در a <u>همان</u> حد تابع f در a خواهد بود.

حالا بررسی گزینه‌ها:

۱ تابع در همسایگی $x=0$ تعریف شده نیست (یعنی نه در همسایگی راست و نه در همسایگی چپ)

۲ تابع در همسایگی راست $x=0$ تعریف شده و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$، پس طبق نکته‌ی (۲) داریم: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

۳ تابع در همسایگی $x=0$ تعریف شده است و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ پس طبق نکته‌ی (۱) داریم: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

پس ۴ صحیح است.

۲۷- گزینه‌ی «۴»

الف چون $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0$، پس $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x^2}=0$.

ب دامنه‌ی تابع $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\cup\{0\}$ است که به وضوح تابع در همسایگی $x=0$ تعریف نشده است.

ج چون $\lim\limits_{x\to ۱^-}\sin^{-۱}(\sqrt{x})=\frac{\pi}{۲}$ ، پس $\lim\limits_{x\to ۱}\sin^{-۱}(\sqrt{x})=\frac{\pi}{۲}$.

د تابع در همسایگی $x=-۱$ تعریف شده و به وضوح $\lim\limits_{x\to -۱}\log(x^۲-۲x)$ برابر $\log ۳$ است.

هـ چون $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{x-۳}{[x-۲]}=۵$ ، پس $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-۳}{[x-۲]}=۵$

و وقتی x به سمت صفر می‌رود، $\frac{۱}{x}$ خیلی بزرگ می‌شود و $\cos$ آن حد ندارد. (چون $\cos\infty$ را نمی‌توانیم مشخص کنیم.)

پس **۴** صحیح است.

۲۸- گزینه‌ی «۴»

دامنه‌ی **۱** به صورت $\{\}$، دامنه‌ی **۲** به صورت $\mathbb{R}-[۰,۱)$ و دامنه‌ی **۳** به صورت $[۱,+\infty)$ است. که هیچ‌کدام در همسایگی موردنظر تعریف نشده‌اند.

اما پاسخ **۴**، صفر است.

۲۹- گزینه‌ی «۴»

۱ و **۲** که دامنه‌شان اعداد طبیعی است. پس اصلاً همسایگی و میل‌کردن و این حرف‌ها ندارند ... دامنه‌ی **۳** هم به صورت $(-\infty,-۱)\cup\{۰\}\cup(۱,+\infty)$ است که در همسایگی صفر تعریف نشده. اما **۴** وجود دارد و جوابش صفر است.

۳۰- گزینه‌ی «۴»

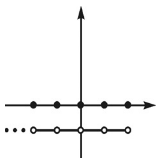
دامنه‌ی این تابع $D_f=\{۰\}$ است. پس هیچ همسایگی در آن وجود ندارد و در $\mathbb{R}$ فاقد حد است.

توجه باید $-۱\le x^۲+۱\le ۱$ باشد تا معکوس سینوس و کسینوس تعریف شوند. یعنی $-۲\le x^۲\le ۰$ که فقط به ازای $x=۰$ برقرار است.

۳۱- گزینه‌ی «۴»

نمودار $f(x)=[x]+[-x]$ به صورت روبه‌روست:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



واضح است که $\lim\limits_{x\to a\in\mathbb{R}}f(x)=-۱$. دقت کنید که در حد، به دنبال مقدار نهایی شاخه‌ها هستیم و نقاط توپر را نادیده می‌گیریم.

- در حالت کلی اگر $u(x)$ در یک همسایگی محذوف a، مقادیر غیرصحیح داشته باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}([u(x)]+[-u(x)])=-۱$

پس در این‌جا چون $x^۲$ در همسایگی تمام اعداد حقیقی، مقادیر غیرصحیح دارد، همه‌ی اعداد را می‌توان به جای a قرار داد (نگران ۳ هم نباشید، از براکت درمی‌آید).

۳۲- گزینه‌ی «۱»

در همسایگی $\sqrt{۶}$ (و کلاً در بازه‌ی $(۱,+\infty)$) مقدار تابع f به طور ثابت برابر ۱ است. پس $[f(x)]+[-f(x)]=۰$ می‌شود.

۳۳- گزینه‌ی «۳»

اول قیافه‌ی ضابطه را کمی عوض کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}}([\log x-\log ۱۰]+[۷-\log x])=\lim_{x\to\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}}([\log x]+[-\log x]+۷-۱)=-۱+۷-۱=۵$$

یادآوری اگر u در همسایگی a ثابت نباشد، $\lim\limits_{u\to a}([u]+[-u])=-۱$.

۳۴- گزینه‌ی «۱»

به عنوان مثال $f(x)=-۲x^۲$، حال واضح است که:

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=۰$$

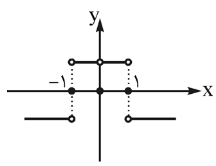
۳۵- گزینه‌ی «۲»

تابع $s(u)$ یا $\mathrm{sgn}(u)$ در نقاطی که u تغییر علامت می‌دهد، حد ندارد.

$$|x|-x^۲=-|x|(|x|-۱)=۰\implies x=۰,۱,-۱$$

		−۱		۰		۱	
$\lvert x\rvert(\lvert x\rvert-۱)$	+	۰	−	۰	−	۰	+

پس در $x=\pm ۱$ تغییر علامت می‌دهد، یعنی در این دو نقطه حد ندارد (دقت کردید که $x=۰$ ریشه‌ی قدرمطلق است و علامت در $x=۰$ تغییر نمی‌کند). نمودارش را ببینید:



۳۶- گزینه‌ی «۳»

در $\boxed{۱}$ ، داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+۳}{\sqrt{x+۱}}=\frac{۳}{۱}=۳$$

در $\boxed{۲}$ ، ابتدا کسر $\frac{x^۲+x}{x}$ را در همسایگی $x=۰$ ساده کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}(x+۱)}{\cancel{x}}=۱$$

پس حد موردنظر برابر است با، $\sqrt{۰+۹}-۱=۲$.

در $\boxed{۳}$ نیز کسر را با اتحاد مزدوج ساده کرده و داریم:

$$\lim_{x\to ۱}(\frac{x^۲-۱}{x-۱}+\sqrt{x^۲+۳})\xrightarrow{x\neq ۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۱+\sqrt{x^۲+۳})=۱+۱+\sqrt{۱^۲+۳}=۴$$

در $\boxed{۴}$ نیز داریم:

$$x\neq ۱\Longrightarrow\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}=\sqrt{x-۱}\Longrightarrow\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}=۰\Longrightarrow\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=۰$$

۳۷- گزینه‌ی «۳»

one راه عادی این است که کسر را در همسایگی $x=۲$ ساده کنیم. صورت را تجزیه و مخرج را گویا می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & ۲ & -۲ & ۱ & -۱۰ \\ ۲ & & & & \\ \hline & ۲ & ۲ & ۵ & ۰ \end{array}$$

$$\frac{۲x^۳-۲x^۲+x-۱۰}{\sqrt{x+۷}-\sqrt{x^۲+۵}}=\frac{(x-۲)(۲x^۲+۲x+۵)}{\underbrace{(x+۷)-(x^۲+۵)}_{-x^۲+x+۲}}(\sqrt{x+۷}+\sqrt{x^۲+۵})=\frac{(x-۲)(۲x^۲+۲x+۵)}{-(x^۲-x-۲)}(\sqrt{x+۷}+\sqrt{x^۲+۵})$$

$$=\frac{\cancel{(x-۲)}(۲x^۲+۲x+۵)}{-\cancel{(x-۲)}(x+۱)}(\sqrt{x+۷}+\sqrt{x^۲+۵})$$

بنابراین حد موردنظر برابر است با:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۲+۲x+۵}{-(x+۱)}(\sqrt{x+۷}+\sqrt{x^۲+۵})=\frac{۲(۴)+۲(۲)+۵}{-۳}(۳+۳)=-۳۴$$

two خواهیم دید که این حد به سادگی با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال قابل حل است. به زبان ساده قاعده‌ی هوپیتال یعنی در حدهای $\frac{۰}{۰}$، به جای صورت و مخرج، مشتق‌های آن‌ها را قرار می‌دهیم. سپس حد می‌گیریم. (توضیحات کامل‌تر را در بخش‌های بعدی می‌بینید)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۳-۲x^۲+x-۱۰}{\sqrt{x+۷}-\sqrt{x^۲+۵}}=\frac{۲(۸)-۲(۴)+۲-۱۰}{\sqrt{۲+۷}-\sqrt{۴+۵}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{Hop}=\lim_{x\to ۲}\frac{۶x^۲-۴x+۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۷}}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۵}}}=\frac{۶(۴)-۴(۲)+۱}{\frac{۱}{۲(۳)}-\frac{۲(۲)}{۲(۳)}}=\frac{۱۷}{-\frac{۳}{۶}}=-۳۴$$

۳۸- گزینه‌ی «۳»

one

$$x_۱=\frac{-۱+\sqrt{۱+a}}{a}=\frac{۱+a-۱}{a(\sqrt{۱+a}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt{۱+a}+۱}\Longrightarrow\lim_{a\to ۰}x_۱=\frac{۱}{\sqrt{۰+۱}+۱}=\frac{۱}{۲}$$ (ریشه‌ی بزرگ‌تر)

two وقتی a به سمت صفر میل کند، معادله‌ی $۲x-۱=۰$ را داریم که ریشه‌ی آن $x=\frac{۱}{۲}$ است!

three بعداً با قاعده‌ی هوپیتال یا هم‌ارزی برنولی هم حل می‌شود.

۳۹- گزینه‌ی «۲»

ضابطه‌ی تابع این‌شکلی بوده:

$$y=\frac{۲x-۳}{\sqrt{ax^۲+bx+c}}$$

حالا در $\lim_{x\to ۱/۵}y$ ، حد صورت صفر می‌شود، اما حد برابر -۱ شده است. پس مخرج صفر بوده، بعد رفع ابهام کردیم و حد برابر -۱ شده است؛ این یعنی $\sqrt{g(x)}$ کلاً با $۲x-۳$ ساده می‌شده و فقط -۱ می‌مانده. پس $g(x)$، $(۲x-۳)^۲$ بوده است و عرض از مبدأ نمودارش می‌شود، $g(۰)=۹$.

توجه دقت کنیم که $\sqrt{(۲x-۳)^۲}$ می‌شود $|۲x-۳|$ و در سمت چپ $x=۱/۵$، با علامت منفی از قدرمطلق درمی‌آید.

۴۰- گزینه‌ی «۲»

وقتی $x\to(-۱)^+$، $x+۱$ مثبت و x منفی است؛ پس $\frac{x}{x+۱}$ با علامت منفی از قدرمطلق درمی‌آید.

$$\lim_{x\to(-۱)^+}(\frac{۲x}{x^۲-۱}-|\frac{x}{x+۱}|)=\lim_{x\to -۱}(\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{x}{x+۱})=\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+x(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x\cancel{(x+۱)}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\lim_{x\to -۱}\frac{x}{x-۱}=\frac{-۱}{-۱-۱}=\frac{۱}{۲}$$